

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО
МНОГОСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ
ЗАКРЕПЛЕНИИ

Л.Ф.ФАТУЛЛАЕВА

НИИ Прикладной Математики

Бакинского Государственного Университета

Все возрастающее значение задач устойчивости и выпучивания сжатых и сжато-изогнутых стержневых элементов конструкций связано с необходимостью экономии веса и материала при проектировании современных конструкций и машин. Последнее, в частности, можно добиться за счет использования композитных материалов, которым присуще свойство кусочной неоднородностью по толщине. В этой связи, в данной работе исследуется выпучивание нелинейно-упругого многослойного стержня при комбинированном закреплении торцов.

1. Решение исходной задачи. Введем в рассмотрение прямоугольный стержень, единичной ширины, длины l и толщиной $2h$. Для определенности, предположим, что при $x = 0$ имеем шарнирное опирание, а при $x = l$ - жесткое защемление (рис. 1):

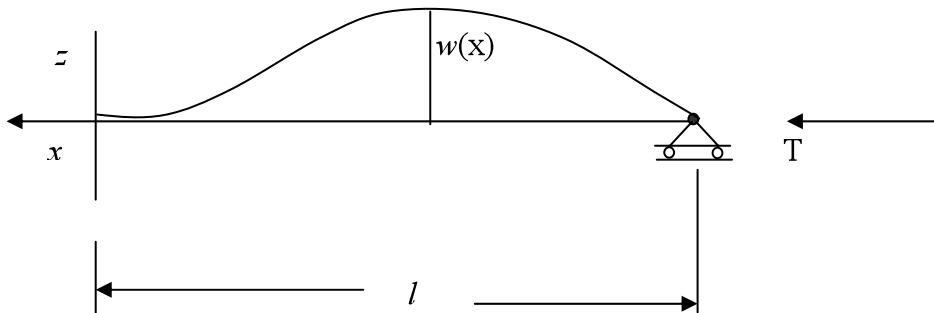


Рис. 1.

Тогда имеем следующие граничные условия:

$$w(0) = 0, \quad M(0) = 0, \quad w(l) = 0, \quad w_{,x}(l) = 0, \quad M(l) \neq 0. \quad (1)$$

Допустим, что стержень составлен из s чередующихся, различных по толщине, слоев (геометрическая неоднородность), с разными модулями упругости E_{k+1} и пределами пропорциональности $\sigma_{k+1}^0 \{k = 0, 1, 2, \dots, (s-1)\}$.

Толщину каждого слоя обозначим через δ_k , так что $\sum_{k=1}^s \delta_k = 2h$. Условия контакта между слоями пакета заключаются в их жестком закреплении, из чего следует равенство на них перемещений, напряжений и отсутствие взаимного давления слоев. В дальнейшем будем руководствоваться гипотезами Кирхофа-Лява, при которых условия жесткого соединения выполняются автоматически. Учитывая гипотезу плоских сечений и начальное искривление стержня, имеем:

$$e = u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x}^2 - w_{0,x}^2) + z(w_{,xx} - w_{0,xx}),$$

где w_0 - характеризует начальное несовершенство. Тогда в скоростях

$$\dot{e} = \dot{u}_{,x} + w_{,x}\dot{w}_{,x} + z\dot{w}_{,xx}.$$

Примем, что нормальное напряжение σ по толщине кольца меняется по линейному закону [1]:

$$\sigma = -\frac{T}{2h} + \frac{3}{2h^3}zM, \quad (2)$$

где T - сжимающая сила, а M - изгибающий момент.

Уравнение состояния для пакета в целом запишем посредством равенства:

$$\varepsilon^v = \frac{\sigma}{E_{k+1}(z)} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0,k+1}(z)} \right)^n \right], \quad a_k \leq z \leq a_{k+1}, \quad (3)$$

здесь

$$a_k = -h + \sum_{j=0}^k \delta_j, \quad \delta_0 = 0,$$

n - показатель нелинейности, принимающий четные значения.

Перейдем теперь к решению задачи о выпучивании выбранного стержня, центрально сжатого силой T . Подобная задача для слабой нелинейности решена в [2]. Для решения поставленной задачи воспользуемся вариационным принципом смешанного типа [3]. Соответствующий функционал запишется в виде:

$$J = J_y + J_n, \quad (4)$$

где J_y и J_n - соответствующие части функционала для упругого и нелинейно-упругого случая:

$$J_y = -\int_0^l w_{,x} \dot{w}_{,x} dx + \int_0^l M \dot{w}_{,xx} dx - \frac{T}{2} \int_0^l \dot{w}_{,x}^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\dot{\sigma}^2}{E_{k+1}(z)} dx dz,$$

$$J_n = -\frac{n+1}{2} \int_0^l \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\dot{\sigma}^2}{E_{k+1}(z)} \left[\frac{\sigma}{\sigma_{0,k+1}(z)} \right]^n dx dz.$$

Точкой, следуя [3], обозначим дифференцирование по T ($\dot{T} = 1$), а запятой – частное дифференцирование по продольной координате x . Теперь, в силу граничных условий (1), аппроксимирующие функции запишем в форме [4]:

$$w(x, T) = a(T) \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{x}{l} \right), \quad (5)$$

$$M(x, T) = m(T) \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{x}{l} \right).$$

Последующий ход рассуждений представляется следующим образом. В начале, выражения (2), (5) и их производные по T подставляются в (4). Затем, после ряда преобразований и интегрирования по z и x , получаем выражение J , как функции $a(T)$, $m(T)$, $\dot{a}(T)$ и $\dot{m}(T)$. Взяв

$$\frac{\partial J}{\partial \dot{a}} = \frac{\partial J}{\partial \dot{m}} = 0,$$

получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Комбинируя их, окончательно имеем следующий результат:

$$\begin{aligned} & -\frac{\pi^2}{2l} \dot{a}(t) - \frac{3\Phi_1}{8h^4} + \frac{27\Phi_2 l}{32h^6} a(t) + \frac{27\Phi_2 l T}{32h^6} \dot{a}(t) + \frac{(n+1)T^n}{2^{n+3} h^{n+4}} \times \\ & \times \sum_{p=0}^n \left\{ \Phi_{p+1}^v \frac{C_n^p 3^{p+1}}{h^{2p} 2^p} a^p(t) K_{p+1} + \Phi_{p+2}^v \frac{C_n^p 3^{p+2}}{h^{2p+2} 2^{p+1}} a^{p+1}(t) K_{p+2} + \right. \\ & \left. + \Phi_{p+2}^v \frac{C_n^p 3^{p+2} T}{h^{2p+2} 2^{p+1}} a^p(t) \dot{a}(t) K_{p+2} \right\} = 0, \quad (6) \end{aligned}$$

здесь, для краткости записи, приняты обозначения:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad \Phi_i = \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{z^i dz}{E_{k+1}}, \quad \Phi_{p+i}^v = \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{z^{p+i} dz}{E_{k+1} \sigma_{k+1}^{0n}}, \quad i = 0, 1, 2,$$

$$K_{p+i} = \int_0^l \left[\sum_{k=0}^{p+i} C_{p+i}^k \cos^{p-k+i} \frac{2\pi x}{l} (-1)^{p+i} \right] dx, \quad i = 1, 2.$$

Введя безразмерные величины соотношениями

$$\xi = \frac{h}{l}, \quad y = \frac{a}{h}, \quad \tau = \frac{T}{hE_1},$$

уравнение (6) перепишем в следующем, удобном для последующего численного интегрирования, виде:

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{-0,5\pi^2 \xi^2 + \varphi_2 \tau + \sum_{p=0}^n \varphi_{p+2}^v \tau^{n+1} y^p}{\varphi_1 - \varphi_2 y - \sum_{p=0}^n \{ \varphi_{p+1}^v \tau^n y^p + \varphi_{p+2}^v \tau^n y^{p+1} \}}, \quad (7)$$

где

$$\varphi_1 = \frac{3 E_1 \Phi_1}{8 h^2}, \quad \varphi_2 = \frac{135 E_1 \Phi_2}{128 h^3},$$

$$\varphi_{p+1}^v = \frac{(n+1) E_1^{n+1} C_n^p 3^{p+1} 5^p K_{p+1}}{2^{n+p+3} 4^p h^{p+3}} \Phi_{p+1}^v,$$

$$\varphi_{p+2}^v = \frac{(n+1) E_1^{n+1} C_n^p 3^{p+2} 5^{p+1} K_{p+2}}{2^{n+p+4} 4^{p+1} h^{p+4}} \Phi_{p+2}^v.$$

Переход к безразмерному дифференцированию осуществляется по правилу:

$$\frac{d}{dT} = \frac{1}{hE_1} \frac{d}{d\tau}.$$

Уравнение (7) следует проинтегрировать при начальном условии

$$y(0) = y_0, \quad (8)$$

в котором величина y_0 характеризует начальное несовершенство.

Таким образом, решение исходной задачи сведено к решению задачи Коши при дополнительном условии

$$\frac{d\tau}{dy} = 0.$$

2. Пример. Введя дополнительно следующие безразмерные величины

$$\lambda = \frac{E_1}{\sigma_{01}}, \quad \gamma = \frac{\sigma_{01}}{\sigma_{02}}, \quad \alpha = \frac{E_1}{E_2}, \quad \beta = \frac{\delta_2}{\delta_1},$$

в качестве примера рассмотрим устойчивость трехслойного ($s = 3$) стержня, когда $E_1 = E_3$, $\delta_1 = \delta_3$, $\sigma_{01} = \sigma_{03}$. Для разных значений n уравнение (7) принимает вид:

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{-4,93\xi^2 + 0,35\varphi_2\tau + 0,27\varphi_2^y\lambda^2\tau^3 + 1,62\varphi_4^y\lambda^2\tau^3y^2}{-0,35\varphi_2y - 0,8\varphi_2^y\lambda^2\tau^2y - 1,62\varphi_4^y\lambda^2\tau^2y^3} \text{ при } n = 2,$$

где

$$\varphi_2 = \frac{2 + 3\beta + 1,5\beta^2 + 0,25\alpha\beta^3}{(1 + 0,5\beta)^3}, \quad \varphi_2^y = \frac{2 + 3\beta + 1,5\beta^2 + 0,25\alpha\beta^3\gamma^2}{(1 + 0,5\beta)^3},$$

$$\varphi_4^y = \frac{2 + 5\beta + 5\beta^2 + 2,5\beta^3 + 0,63\beta^4 + 0,063\alpha\beta^5\gamma^2}{(1 + 0,5\beta)^5};$$

$$\frac{d\tau}{dy} = (-4,93\xi^2 + 0,35\varphi_2\tau + 0,11\varphi_2^y\lambda^4\tau^5 + 4,06\varphi_4^y\lambda^4\tau^5y^2 + 5,6\varphi_6^y\lambda^4\tau^5y^4) \times$$

$$\times (-0,35\varphi_2y - 0,55\varphi_2^y\lambda^4\tau^4y - 6,76\varphi_4^y\lambda^4\tau^4y^3 - 5,6\varphi_6^y\lambda^4\tau^4y^5)^{-1} \text{ при } n = 4,$$

где

$$\varphi_2 = \frac{2 + 3\beta + 1,5\beta^2 + 0,25\alpha\beta^3}{(1 + 0,5\beta)^3}, \quad \varphi_2^y = \frac{2 + 3\beta + 1,5\beta^2 + 0,25\alpha\beta^3\gamma^4}{(1 + 0,5\beta)^3},$$

$$\varphi_4^y = \frac{2 + 5\beta + 5\beta^2 + 2,5\beta^3 + 0,63\beta^4 + 0,063\alpha\beta^5\gamma^4}{(1 + 0,5\beta)^5},$$

$$\varphi_6^y = \frac{2 + 7\beta + 10,5\beta^2 + 8,75\beta^3 + 4,38\beta^4 + 1,31\beta^5 + 0,22\beta^6 + 0,016\alpha\beta^7\gamma^4}{(1 + 0,5\beta)^7};$$

$$\frac{d\tau}{dy} = (-4,93\xi^2 + 0,35\varphi_2\tau + 0,04\varphi_2^y\lambda^6\tau^7 + 3,55\varphi_4^y\lambda^6\tau^7y^2 + 29,41\varphi_6^y\lambda^6\tau^7y^4 +$$

$$+ 18,67\varphi_8^y\lambda^6\tau^7y^6) \cdot (-0,35\varphi_2y - 0,27\varphi_2^y\lambda^6\tau^6y - 8,28\varphi_4^y\lambda^6\tau^6y^3 -$$

$$- 41,17\varphi_6^y\lambda^6\tau^6y^5 - 18,67\varphi_8^y\lambda^6\tau^6y^7)^{-1} \text{ при } n = 6,$$

где

$$\varphi_2 = \frac{2 + 3\beta + 1,5\beta^2 + 0,25\alpha\beta^3}{(1 + 0,5\beta)^3}, \quad \varphi_2^v = \frac{2 + 3\beta + 1,5\beta^2 + 0,25\alpha\beta^3\gamma^6}{(1 + 0,5\beta)^3},$$

$$\varphi_4^v = \frac{2 + 5\beta + 5\beta^2 + 2,5\beta^3 + 0,63\beta^4 + 0,063\alpha\beta^5\gamma^6}{(1 + 0,5\beta)^5},$$

$$\varphi_6^v = \frac{2 + 7\beta + 10,5\beta^2 + 8,75\beta^3 + 4,38\beta^4 + 1,31\beta^5 + 0,22\beta^6 + 0,016\alpha\beta^7\gamma^6}{(1 + 0,5\beta)^7},$$

$$\varphi_8^v = (2 + 9\beta + 13,5\beta^2 + 21\beta^3 + 15,75\beta^4 + 7,88\beta^5 + 2,63\beta^6 + 0,42\beta^7 + 0,07\beta^8 + 0,004\alpha\beta^9\gamma^6) \cdot (1 + 0,5\beta)^{-9}.$$

Последующая задача состоит в численном интегрировании полученных уравнений методом Рунге-Кутты. При следующих расчетных данных

$$\lambda = 3 \cdot 10^2, \quad y_0 = 10^{-1}, \quad \xi = 10^{-1}$$

на рисунках 1-3 приведены зависимости $\tau_{кр}$ от α , β и γ .

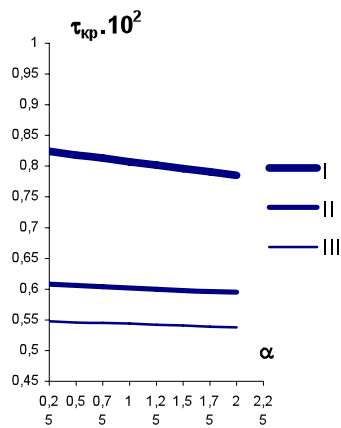


Рис. 1.

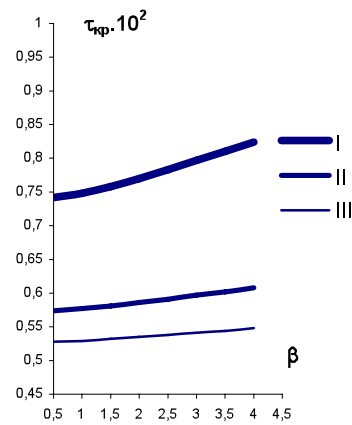


Рис. 2.

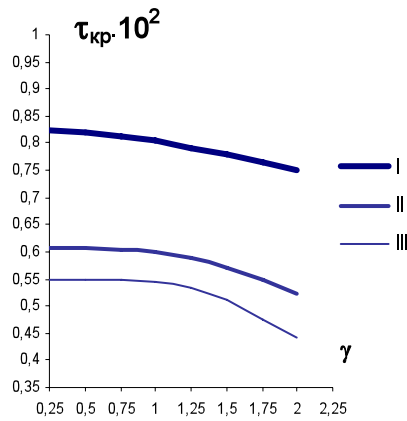


Рис.3.

Линии I, II, III соответствуют значениям критических сил, определяемых соответственно при $n = 2$, $n = 4$ и $n = 6$.

Чтобы качественно дать представление о характере изменения критических сил, получаемых для разных значений показателя нелинейности, приведем случай однородности ($\alpha = \beta = \gamma = 1$), для которого

$$\tau_{кр} \approx 0,007403 \quad (n = 2), \quad \tau_{кр} \approx 0,005736 \quad (n = 4), \quad \tau_{кр} \approx 0,005276 \quad (n = 6).$$

При нулевом эксцентриситете условие обращения в нуль знаменателя уравнения (7) дает алгебраическое уравнение $n+1$ степени для определения критической силы центрально-сжатого стержня:

$$\frac{\pi^2}{2} \xi^2 - \varphi_2 \tau - \varphi_2^v \tau^{n+1} = 0. \quad (9)$$

Это уравнение определяет критическую силу Шенли.

В таблицах 1, 2 и 3 даны зависимости значений критических сил Шенли от параметров α , β , γ соответственно.

Таблица 1

α	n=2	n=4	n=6
0,25	0,010803	0,008141	0,007294
0,5	0,010735	0,008125	0,007286
0,75	0,010666	0,008102	0,007278
1	0,010605	0,008087	0,007271
1,25	0,010536	0,008072	0,007263
1,5	0,010475	0,008057	0,007256
1,75	0,010406	0,008041	0,007240
2	0,010345	0,008026	0,007233

Таблица 2

β	n=2	n=4	n=6
0,5	0,009590	0,007568	0,006927
1	0,009697	0,007614	0,006958
1,5	0,009842	0,007690	0,007004
2	0,010017	0,007774	0,007057
2,5	0,010216	0,007866	0,007118
3	0,010406	0,007957	0,007179
3,5	0,010605	0,008049	0,007240
4	0,010803	0,008141	0,007294

Таблица 3

γ	n=2	n=4	n=6
0,25	0,010803	0,008141	0,007294
0,5	0,010735	0,008125	0,007293
0,75	0,010628	0,008087	0,007278
1	0,010483	0,007980	0,007195
1,25	0,010307	0,007782	0,006958
1,5	0,010109	0,007484	0,006531
1,75	0,009895	0,007111	0,005989
2	0,009674	0,006699	0,005463

3. Выводы. Анализируя полученные численные результаты можно сделать следующие выводы:

- как и следовало ожидать, увеличение показателя нелинейности уменьшает значения критических сил;
- при фиксированных β и γ увеличение α приводит к уменьшению $\tau_{кр}$, что вполне объяснимо фиксированностью E_1 , ибо увеличение α связано с уменьшением E_2 , что приводит к снижению жесткости кольца;
- при фиксированных α и γ увеличение β приводит к увеличению $\tau_{кр}$;
- при фиксированных α и β увеличение γ приводит к уменьшению $\tau_{кр}$;
- при всех обстоятельствах значения критических сил меньше значений критических сил Шенли;
- из данных рисунков следует, что при достаточно больших n значения критической силы близки друг к другу.

Таким образом, конструированием неоднородности можно увеличить или уменьшить критическую силу и, тем самым, в определенном смысле оптимизировать конструкцию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амензаде Р.Ю., Киясбейли Э.Т. О точности линейного распределения напряжения в задачах выпучивания многослойных стержней. ДАН Азерб. Республики, 2000, № 4-6, с.72-77.
2. Kiyasbeyli E.T. Buckling of multiplayer non-linearly-elastic rods. Transactions of NAS Azerbaijan, v. XXII, №1, pp. 200-205.
3. Амензаде Р.Ю. Выпучивание сжатого стержня, изготовленного из нелинейного материала. Ученые записки АГУ, 1970, №1, с.70-82.
4. Абдуллаев Ф.А., Амензаде Р.Ю., Киясбейли Э.Т. Устойчивость многослойных стержней при различных видах закреплений. Вестник БГУ, серия физико-математических наук, 2001, №1, с.131-141.

UCLARI MÜXTƏLİF CÜR BAĞLANMIŞ QEYRİ-XƏTTİ ELASTİK ÇOXLAYLI ÇUBUĞUN SON HƏDD VƏZİYYƏTİ

L.F.FƏTULLAYEVA

XÜLASƏ

Konstruksiyalarda sıxılmış, sıxılmış-əyilmiş çubuqvari elementlərin dayanıqlığı və qabarması məsələlərinin tədqiqinin əhəmiyyəti müasir konstruksiyaların, maşınların layihələşməsi zamanı çəkinin və materialın qənaətinin vacibliyi ilə bağlıdır. Buna isə xüsusi halda, kompozit materiallardan istifadə etməklə nail olmaq mümkündür. Kompozit materiallara qalınlığı boyu hissə-hissə qeyri-bircinslilik xassəsi xasdır. Bununla əlaqədar olaraq, baxılan işdə ucları müxtəlif cür bağlanmış qeyri-xətti elastik çoxqatlı çubuğun qabarması məsələsi tədqiq olunur.

LIMITING CONDITION OF THE NON-LINEAR ELASTIC MULTILAYER ROD AT COMBINED FASTENING

L.F.FATULLAYEVA

SUMMARY

All increasing value of problems of stability and bulging oblate also oblate - bending of beam members of designs is connected to necessity of economies of weight and stuff at designing of modern designs and machines. Last, in particular, is possible to achieve at the expense of usage of composite materials, the property by a piecewise non-uniformity on depth is generic in which one. In this connection, in given to activity the bulging of a non-linear - elastic multilayer rod is investigated at combined pinch of butt ends.